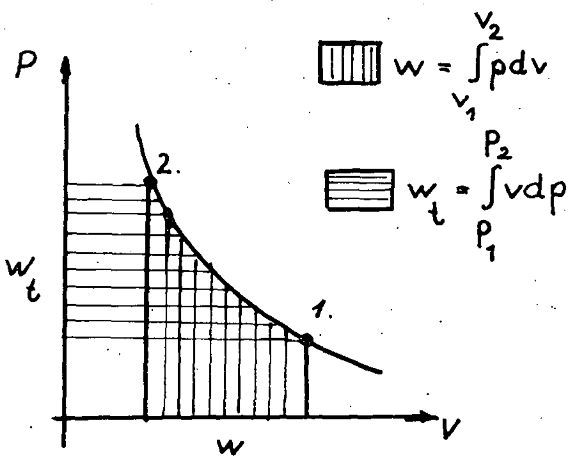
POLITROPIKUS ENERGIAÁTALAKULÁSI DIAGRAMOK

ZANA JÁNOS*

Bevezetés

A technikában igen sokszor számítunk állapotváltozásokat, különösképpen hőközlést és munkavégzést. Ezt nagymértékben segítik az entalpia diagramok. Alkalmazhatóságuk azonban korlátozott. Így lehetséges pl. a közölt hő kiszámítása az entalpiaváltozásból, de csakis izobár állapotváltozásnál.

A nyomás-térfogat diagramok lehetővé teszik a munkavégzés kiszámítását a görbe alatti terület megmérése útján (1. ábra). A hőközlést a hőmérséklet-entrópia diagramból határozhatjuk meg, szintén területméréssel (2. ábra). Az ábrán vízszintes

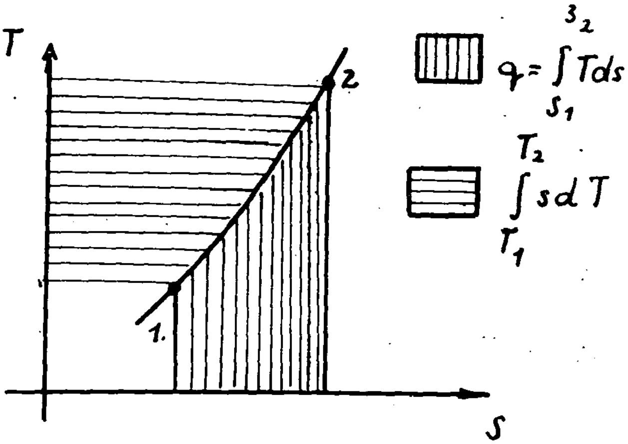


1. ábra

vonalkázással jelölt terület az $\int sdT$ függvény. Ez, mint látható, útfüggő, vagyis nem állapotjelző. Valamennyi területmérésre épülő számítási eljárás nehézkes, mert pontos planimetrálást igényel.

A valóságos körülményeket általában politropikus állapotváltozásokkal kell leírnunk. Ezek bonyolult számítása lényegesen egyszerűsödik az energiaátalakulási diagramok használatával, amit közleményem végén ismertetek.

* Géptan Tanszék.



2. ábra

Az energiaátalakulások matematikai megközelítése

A közeg energiatartalmát az entalpia fejezi ki (fajlagos entalpia):

$$i = u + pv + \frac{c^2}{2}$$

A mozgási energia $\left(\frac{c^2}{2}\right)$ elhanyagolásával a nyugvó anyag entalpiáját kapjuk. Így az entalpia

$$i = u + pv.$$

Képezzük az entalpia differenciálját:

$$di = du + pdv + vdp,$$

ami úgy is írható, hogy

$$di = q + vdp.$$

Az entalpia differenciálegyenletében szereplő tagokat a térfogatváltozási munka (w) és a technikai munka (w_t) jelével helyettesítem:

$$di = du + w + w_t.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan számíthatók az egyenlet tagjai a hőmérsékletváltozás (ΔT) segítségével:

$$\Delta i = \varkappa c_v \Delta T,$$

$$\Delta u = c_v \Delta T$$

$$w = \frac{1-\varkappa}{n-1} c_v \Delta T,$$

$$w_t = n \frac{\varkappa - 1}{n-1} c_v \Delta T.$$

Az entalpia egyenletét a képletekkel helyettesített formában írjuk fel:

$$\varkappa c_v \Delta T = c_v \Delta T + \frac{1-\varkappa}{n-1} c_v \Delta T + n \frac{\varkappa-1}{n-1} c_v \Delta T.$$

Ha ezt végigosztjuk $c_v \Delta T$-vel, egységnyi dimenziójú relatív egyenlethez jutunk:

$$\varkappa = 1 + \frac{1-\varkappa}{n-1} + n \frac{\varkappa-1}{n-1}$$

Realizáljuk az egyenletet levegőre ($\varkappa = 1{,}4$) és izobár állapotváltozásra ($n = 0$):

$$1{,}4 = 1 + \frac{1-1{,}4}{0-1} + 0 \frac{1{,}4-1}{0-1}$$

A számításokat elvégezve:

$$1{,}4 = 1 + 0{,}4.$$

Ha a belső energia megváltozását 100%-nak tekintjük, az entalpia 140% változást szenved, és 40%-nyi munkavégzést kapunk. Pl. $Q = 140$ kcal hőközlés esetén az entalpia egyenlete:

$$140 \text{ kcal} = 100 \text{ kcal} + 40 \text{ kcal}.$$

Az entalpiaváltozást entalpia diagramról is leolvashatjuk.

Az energiaátalakulási diagramok szerkesztése

A relatív entalpiaegyenlet tagjait ábrázolhatjuk mint n politropikus kitevő függvényét. Ha $\varkappa$-val az egyenletet végigosztjuk, az entalpiaváltozás mindig 100% lesz, az állapotváltozástól függetlenül:

$$1 = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa} \frac{1-\varkappa}{n-1} + \frac{n}{\varkappa} \frac{\varkappa-1}{n-1}$$

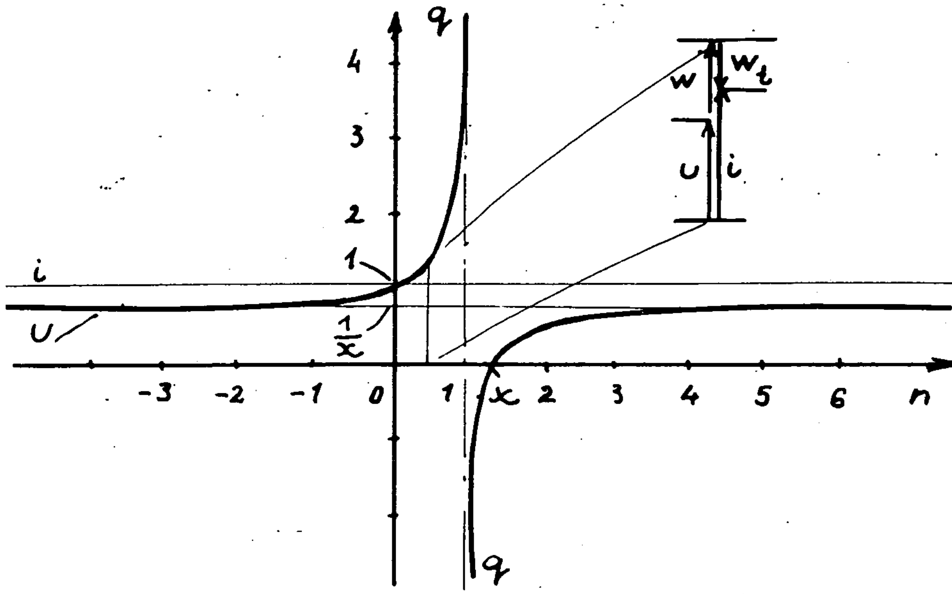
Az egyenletet a 3. ábrán látható módon rajzolhatjuk föl. Az ábra két vízszintes egyenesből és egy hiperbolából áll. Az alsó egyenest $\frac{1}{\varkappa}$ értéknél húzzuk, amely a belső energia változását ábrázolja. A felső egyenest az 1 értéknél húzzuk, ez az entalpia változását adja. A két vízszintes közötti távolság

$$\Delta i - \Delta u = \Delta(pv) = 1 - \frac{1}{\varkappa}$$

a potenciálfüggvény megváltozásával arányos.

A térfogatváltozási munkát az u vízszintesétől mérjük fel, s ezért az eredő a közölt hővel lesz arányos. A hő a vízszintes tengely és a hiperbola között olvasható le. A hiperbola első fokú, asszimptotái:

$$q = \frac{1}{\varkappa}$$



3. ábra

és

$$n = 1,$$

tengelymetszetei

$$q = 1$$

és

$$n = \varkappa.$$

Az ábrán vektoriálisan ábrázoltam egy izobár-izoterm közti expanzió energiaviszonyait. A belső energia növekszik, hiszen a hőmérséklet is emelkedik, a nyíl felfelé mutat. A terjeszkedési munka pozitív, hiszen a közeg térfogata növekszik. A belső energia-vektor kezdőpontjától a munka-vektor végpontjáig a hő mérhető. Mint látható, a hőközlés pozitív, vagyis az állapotváltozás alatt hőt vezetünk be a közegbe (fűtött expanzió).

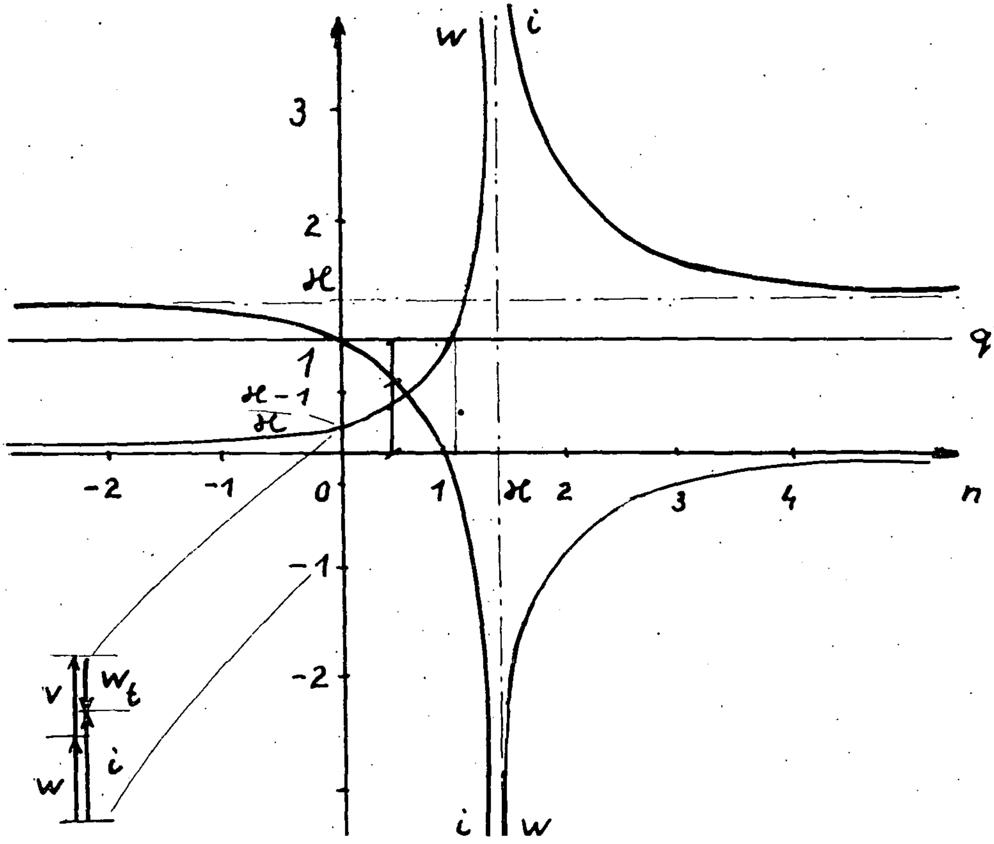
Negatív értékű a technikai munka vektora. Értékét a q görbe és az i vízszintes között olvashatjuk le. Végül, a vektorsokszög eredője az entalpia. Iránya pozitív, ahogyan ez várható volt.

A 3. ábrán közölt diagram két hátránnyal rendelkezik. Egyrészt nehézkes a rajzolása a hiperbola szerkesztése miatt, másrészt az izotermikus állapotváltozás közvetlen közelében nem használható. Előnye, hogy az állandó térfogatú állapotváltozásra értelmezhető, bár azt a végtelenben ábrázolja.

Ahogy az entalpiára tettük, úgy lehetséges a hőmennyiségre is relatív entalpiaegyenletet felírni.

$$\Delta i = q + w_t$$

$$\varkappa \frac{n-1}{n-\varkappa} = 1 + n \frac{\varkappa - 1}{n - \varkappa}$$



4. ábra

Az egyenlet képe a 4. ábrán látható. Hátránya, hogy két hiperbolából áll (i és w), s ezenkívül lehetetlen az adiabatikus állapotváltozások leírása.

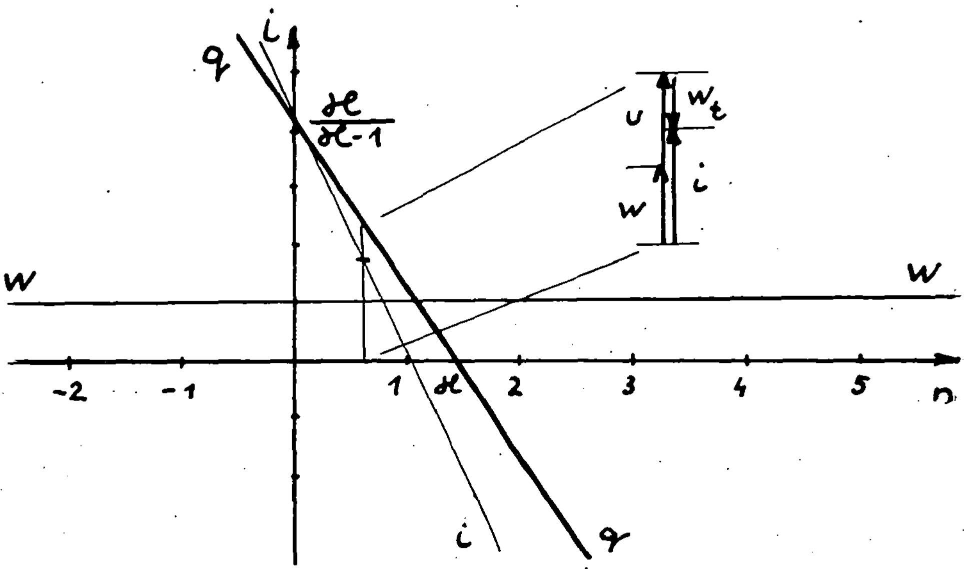
Valamennyi, eddig említett hátrány kiküszöbölhető, ha a relatív egyenletet a térfogatváltozási munkára fejezzük ki:

$$\varkappa\frac{n-1}{1-\varkappa}=\frac{n-1}{1-\varkappa}+1+(-n).$$

Ez a függvény az 5. ábrán látható. Rendkívül szembetűnik előnyös tulajdonsága, hogy vonalzóval rajzolható. Előnye az is, hogy pontos leolvasást tesz lehetővé az izotermikus és adiabatikus állapotváltozások környezetében. Csupán egy hátránnyal rendelkezik: nem alkalmazható állandó térfogatú állapotváltozásokra. Ezek azonban ritkán fordulnak elő a technikában, és számításuk könnyen elvégezhető.

Az 5. ábra szerkesztése rendkívül egyszerű. Megrajzoljuk tengelymetszeteiből az entalpiafüggvényt. Tengelymetszetei:

$$i=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}$$



5. ábra

és

$$n = 1.$$

Ezután megrajzoljuk a hőközlés-függvényt. Tengelymetszetei:

$$q = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$$

és

$$n = \varkappa.$$

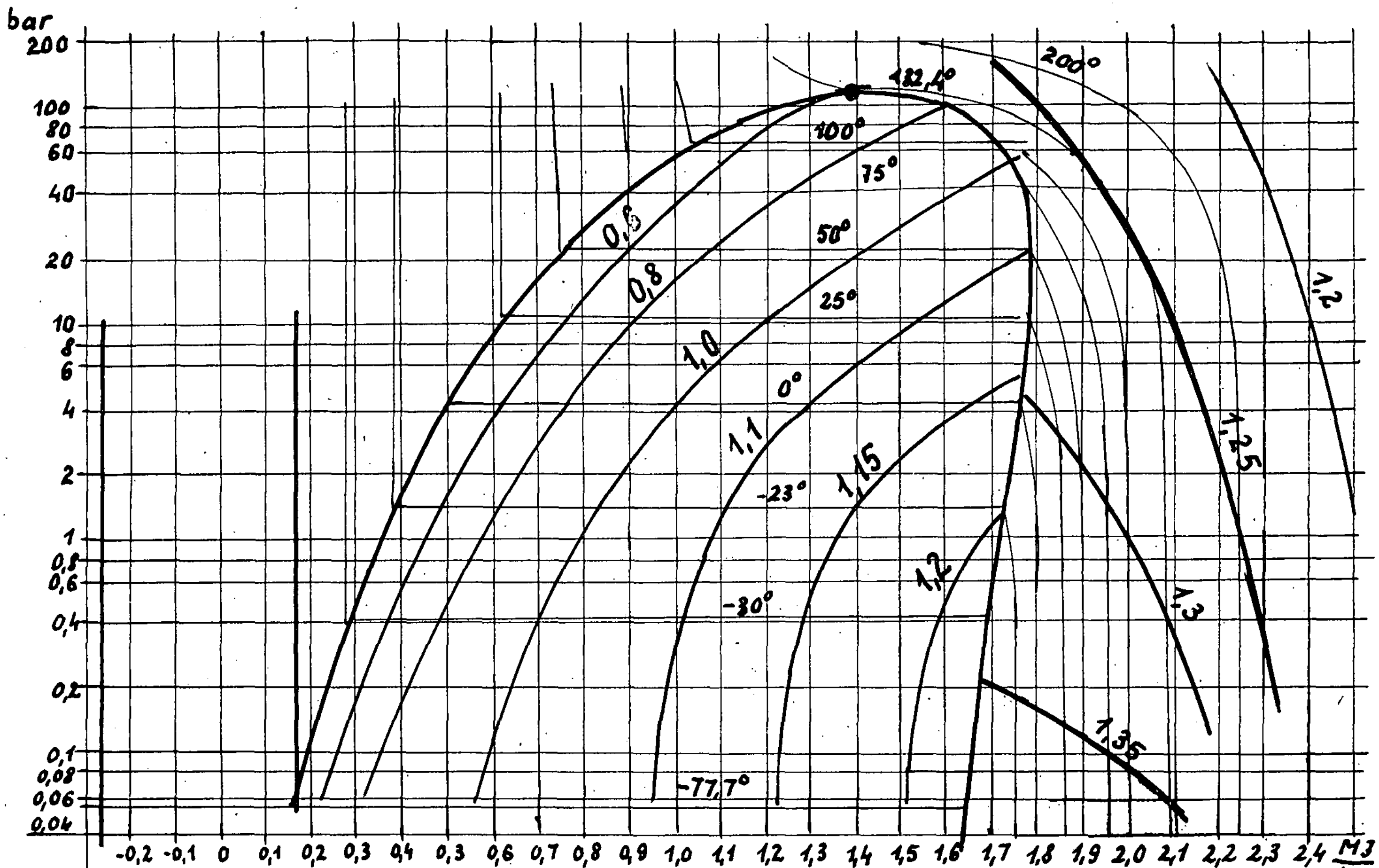
Az entalpiaváltozás és a hőközlés is a vízszintes tengelytől mérhető, így a leolvasás igen egyszerű.

A diagramok alkalmazása reális gázoknál

Reális gázoknál minden további nélkül felrajzolhatjuk az energiaátalakulási diagramokat, azonban tartsuk szem előtt a következőket.

Reális gázok c_p fajhőviszonya eltér az ideális gázokétól. A q görbe tengelymetszetének helye mindenkor a $\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$ tényleges értékénél legyen. A 6. ábrán megadom a c_p fajhőviszony értékét nedves és túlhevített ammóniagőzre. Látható, hogy a határgörbét átlépő állapotváltozásokat két szakaszban kell számítanunk, hiszen ott a $\varkappa$ ugrásszerűen változik. A kritikus állapotú nedves gőz esetében 0,68 vehető fel.

Az i görbe tengelymetszete az $n = 1$ pontba kerüljön. Az izentalpikus állapotváltozást ugyanis jól leírja a $pv = \text{áll.}$ egyenlet ($x = 0{,}2$ alatt a tengelymetszet eltolódik az $n = 0{,}9 \ldots 0{,}6$ pontba).


bar
200
100
80
60
40
20
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0,08
0,06
0,04
-0,2 -0,1 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,3 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2,0 2,1 2,2 2,3 2,4
MJ/kg
200°
132,4°
100°
75°
50°
25°
0°
-23°
-30°
-77,7°
0,6
0,8
1,0
1,1
1,15
1,2
1,25
1,3
1,35

6. ábra

Az izotermikus állapotváltozás helye mindig balra van az i görbe tengelymetszetétől. Nagymértékben túlhevített gőznél $n = 0{,}98$ választható, a határgörbe közelében $n = 0{,}94$, nedves gőznél $n = 0$.

A görbék függőleges tengelymetszete nem a $\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$ helyre kerül, ha nedves gőz (folyadék-gőz keverék) adatait számítjuk. Az $x = 0{,}4$ gőztartalom környezetében a nevező már végtelenné válna. A tengelymetszet értéke azonban csak a 9...11 értéket éri el. Ennyi a párolgáshő és térfogatváltozási munkájának hányadosa ammóniánál.

Az energiaátalakulási diagramok alkalmazása egyéb állapotjelzők esetében.

A belső energia részekre választásával az entalpia egyenlete:

$$i = Ts + f + pv,$$

$$di = sdT + Tds + df + pdv + vdp.$$

Fejezzük ki a relatív entalpiaegyenletet:

$$\varkappa = \frac{s}{c_v} + \frac{n - \varkappa}{n - 1} + \left(-\frac{s}{c_v} + \frac{\varkappa - 1}{n - 1}\right) + \frac{1 - \varkappa}{n - 1} + n\,\frac{\varkappa - 1}{n - 1}$$

Ha a térfogatváltozási munkát egységnyivé tesszük, a 7. ábrán látható teljes diagramhoz jutunk. Ebben már megjelent a szabadenergia-függvény is, amely az előzőekhez hasonlóan egyenes. A szabadenergia-változás értékét a munka-függvénytől a szabadenergia-függvényig húzott egyenes adja.

A szabadenergia-függvényt célszerűen a 2. ábrán szerepeltetett $\int sdT$ fogalom értékével ábrázoljuk (az energiaátalakulás vektoriális ábrázolása így illeszkedik a diagramhoz). Ezért a szabadenergia-függvényt az $\int sdT$ tengelymetszetei határozzák meg:

$$\int sdT = \frac{s}{c_v(\varkappa - 1)} = \frac{s}{R}$$

$$n = 1.$$

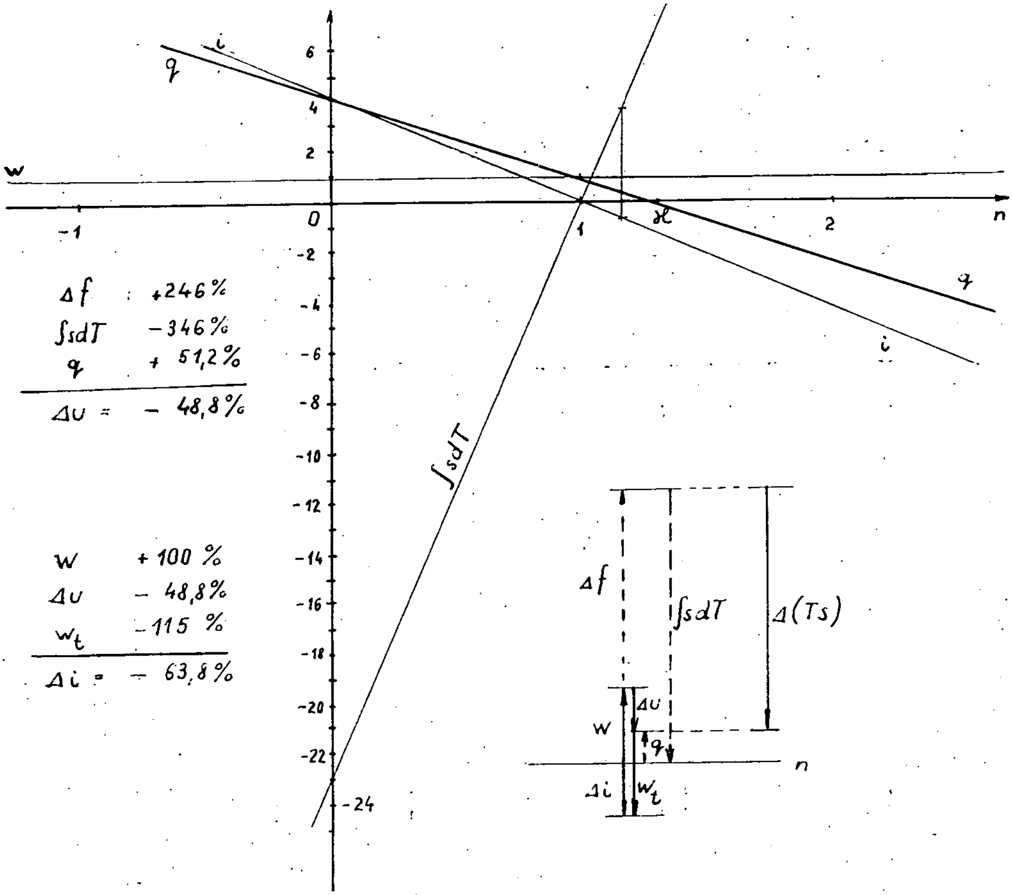
Reális gázoknál az alábbiakat kell figyelembe vennünk. A vízszintes n tengely metszése mindig az izotermikus állapotváltozást jelentő n értékhez kerüljön. Ugyanígy, a függőleges tengelymetszet helyét a reális gáz entrópiájából és gázállandójából kell számítanunk, tehát a standardentrópiából számított érték legyen, R a

$\frac{pv}{T}$ hányados értékével azonos.

A 7. ábra tartalmazza az energiaátalakulások értékét túlhevített ammóniagőzre vonatkoztatva, $n = 1{,}15$ kitevőjű politropikus expanzió esetében. Az állapotjelzők közepes értéke:

$$p = 1 \text{ atm},$$

$$t = +25\,°\mathrm{C},$$



7. ábra

Ebben a környezetben a diagram rajzolásához szükséges adatok:

$$\varkappa = 1{,}308,$$

$$R = 492 \ \frac{J}{\text{kgK}},$$

$$c_v = 1{,}59 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}},$$

$$s_{298} = 11{,}29 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}.$$

Az entalpiagörbe tengelymetszetei:

$$i = \frac{1{,}308}{1{,}308 - 1} = 4{,}25 \ ,$$

$$n = 1.$$

A hőközlés-görbe tengelymetszetei:

$$q = \frac{1{,}308}{1{,}308 - 1} = 4{,}25,$$

$$n = 1{,}308.$$

A szabadenergia-görbe tengelymetszetei:

$$\int s dT = \frac{11{,}29}{1{,}59\,(1{,}308 - 1)} = 23\ ,$$

$$\int s dT = \frac{11{,}29}{0{,}492} = 23,$$

illetve

$$n = 1.$$

A 7. ábrán az energiaátalakulások nagyságát és előjelét vektorsokszöggel szemléltettem, fűtött expanzióra vonatkoztatva.

Befejezésül megjegyezni kívánom, hogy módszerem a technikai alkalmazásokon kívül igen előnyösen használható oktatási célokra. Előnye főleg a módszer vizualitásában nyilvánul meg. A diagramok oktatásakor célszerűnek tartom a hőközlés-görbe megrajzolásával bevezetni a számítási eljárást, majd ennek megértése után megismertetni a bonyolultabb összefüggéseket.

ПОЛИТРОПИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Я. Зана

Автор предлагает новый градический метод для расчётов тепловых изменений состояния, при помощи которого можно просто определить изменение показателей состояния и величину передачи энергии. Рисунок 7 познакомит читателя с количественно разработанным примером (аммиачный пар), относящимся к политропической экспанзии.

Сообщение используется величиной показателей состояния, относящейся к единице массы. Система знаков следующая: T = температура, s = удельная энтропия, f = удельная свободная энергия, p = давление, v = удельная ёмкость, c = скорость, w = удельная работа, w_t = удельная техническая работа, u = удельная внутреняя энергия, q = удельная передача теплоты, c_v = удельная теплота, R = газовая константа, $\varkappa$ = адиабатический экспонент, n = политропический экспонент.

POLYTROPIC ENERGY TRANSFORMATION DIAGRAMS

J. Zana

A new graphical method is suggested for the calculation of the thermodynamic changes of state. With the aid of this the changes in value of the state indices and the value of the transfer of energy can be determined in a simple way. A numerical example for ammonia vapour is reported, which relates to polytropic expansion. The value of the state indices referred to unit mass is used. His system of notation is as follows: i specific enthalpy, T temperature, s specific entropy, f specific free energy, p pressure, v specific volume, c velocity, w specific work, w_t specific technical work, u specific intrinsic energy, q specific heat transfer, c_v specific heat, R gas constant, $\varkappa$ adiabatic exponent, n polytropic exponent.

POLYTROPISCHE ENERGIEUMWANDLUNGSDIAGRAMME

J. Zana

Der Verfasser empfiehlt eine neue graphische Methode zur Berechnung von thermischen Zustandsänderungen. Mit dieser Methode kann man die Veränderung des Wertes von Zustandszeigern und den Wert der Energiezufuhr einfach bestimmen. An Abbildung 7 gibt er ein für Ammoniakdampf numerisch ausgearbeites Beispiel, das sich auf die polytropische Expansion bezieht.

Diese Darlegung benützt den sich auf die Masseneinheit beziehenden Wert der Zustandszeiger. Das Bezeichnungssysteme ist folgendes: i ist die spezifische Entalpie, T die Temperatur, s die spezifische Entropie, f die spezifische Freienergie, p der Druck, v das spezifisches volumen c die Geschwindigkeit, w die spezifische Arbeitsleistung, u die spezifische innere Energie, q die spezifische Wärmezufuhr; c_v die spezifische Wärme; R die Gaskonstante, $\varkappa$ der adiabatische Exponent, und n der polytropische Exponent.